УЧЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СПРОСА ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

КОСОРУКОВ ОЛЕГ
РЭУ им. Г.В. Плеханова, кафедра математических методов в экономике, профессор, д.т.н.

СВИРИДОВА ОЛЬГА
РЭУ им. Г.В. Плеханова, кафедра математических методов в экономике, ассистент, аспирант

Специфика деятельности торговой организации такова, что большая часть ее финансовых средств сосредоточена в запасах, поэтому эффективное управление складом для торговых предприятий является первоочередной задачей. Эффективность управления определяется возможностью поддержания запасов на таком уровне, который обеспечит бесперебойное функционирование компании при минимальных затратах. Механизмами эффективного управления служат планирование, прогнозирование и оптимизация.

Модели теории управления запасами призваны решать вопросы организации запаса и пополнения соответствующего продукта или товара. В частности, это выбор моментов подачи заказов на пополнение запаса, выбор объема пополнения запаса и другие варианты принятия решений. Особенности таких моделей представлены на рис. 1.

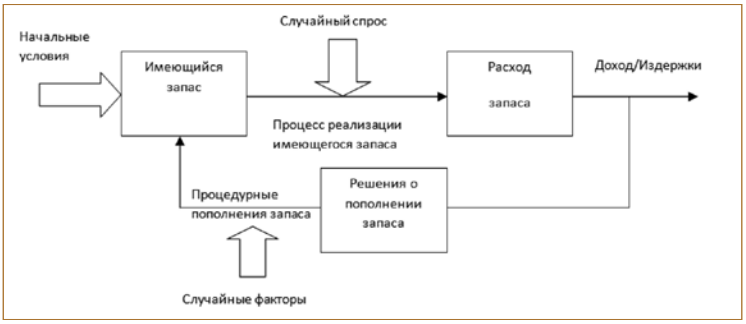

Рисунок 1 *Общая схема моделей управления запасами*

Особенности анализа моделей управления запасами обусловливаются, как правило, следующими факторами: случайным характером спроса (процесс реализации запаса представляет собой случайный процесс); длительностью процедур пополнения запасов (также являются случайными величинами); решениями о пополнении запасов, которые предопределяют объемы увеличения запасов, моменты подачи заказов на такое увеличение (включая моменты поступления заказов).

Задача оптимального управления запасами встает в торгово-посреднических организациях вследствие того, что хранение продукции одного вида может требовать таких условий освещенности, влажности, температуры, которые не согласуются с условиями хранения других видов продукции — продукты конкурируют за режим хранения. Суммарная стоимость оптимальных партий может не вписываться в бюджет организации. Возникает конкуренция за ограниченный объем затрат. Одновременно поступившие оптимальные партии разных продуктов могут не помещаться на площади склада. Возникает конкуренция за использование ограниченной площади. При грамотном управлении запасом потребность в складских площадях, как правило, существенно меньше, чем планировалось ранее, что значительно уменьшает издержки предприятия. Совместно вывозимые партии разных продуктов могут не помещаться в одном контейнере. Возникает конкуренция за объем контейнера.

Единого критерия для решения задачи оптимизации уровня запасов в теории и практике управления запасами не существует, поэтому следует исходить из варианта минимизации или всех видов логистических издержек, или только некоторой их группы. В этом случае можно использовать различные критерии оптимизации уровня запасов, например, соотношение входящих и выходящих денежных потоков, или реализация технологии «just-in-time», или обеспечение товарами непосредственно под конкретные заказы потребителей.

Существует ряд детерминированных моделей управления запасами, однако в реальных условиях всегда присутствует неопределенность, которая делает этот процесс случайным. Основные источники неопределенности в системах управления запасами связаны со спросом, который не всегда может быть точно спрогнозирован, а также со сроками поставки, так как реальный срок поставки часто не совпадает с запланированным. Управление этой неопределенностью — ключ к сокращению уровней запасов и удовлетворению ожиданий клиента. Проблемы, связанные с неопределенностью времени поставки заказа и изменением значения спроса во времени, особенно сложны. В подобных ситуациях нужно применять такие методы, как имитационное моделирование (например, как в [3]). Однако если ограничить возрастание сложности модели, вызванное неопределенностью значений времени поставки заказа или спроса, можно построить математическую модель, достаточно верно отражающую изложенную ситуацию. Кроме того, следует все же сделать некоторые предположения, касающиеся поведения системы. Если значение спроса неопределенно, предполагается, что он изменяется в соответствии с некими характеристиками, которые можно получить на основе эмпирических данных, содержащих фактические значения спроса либо можно предположить, что спрос определяется стандартными статистическими моделями, например, нормальным распределением или распределением Пуассона.

В современной литературе по управлению запасами встречаются такие подходы к анализу неопределенности различного характера, как имитационное моделирование, сценарное моделиро-

АННОТАЦИЯ
В статье описана стохастическая модель управления запасами торговой компании, основанная на принципе сбалансированности издержек и позволяющая определить оптимальный момент назначения поставки, минимизирующий общие издержки.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Логистика, управление запасами, экономико-математические модели, оптимизация.

ANNOTATION
The article describes a model of inventory management of trading company considering the uncertainty of demand, which is based on the principle of balancing costs. The model allows to find the optimal point in time for the next order that minimizes overall costs.

KEY WORDS
Logistics, inventory control, mathematical models, optimization

вание, методы интервального анализа, теория нечетких множеств и др., однако нет исследований аналитических зависимостей непрерывных моделей, позволяющих получить ответ на вопрос, когда следует заказывать доставку новой партии товара.

Неопределенность будущих продаж и поставок для пополнения ресурсов порождает потребность в страховых запасах. Часто в результате неверного планирования создаются чрезмерные запасы. Кроме того, финансовые средства, вложенные в запасы, замораживаются в них и не могут быть использованы на другие направления и инвестиции. Сегодня компании стремятся сокращать запасы, снижая издержки хранения, повышая оборачиваемость запасов и рентабельность бизнеса.

В настоящей работе авторами была поставлена задача определения момента времени, на который следует назначать поставку заказа, позволяющего поддерживать запасы на оптимальном уровне, одновременно снижая затраты на хранение запаса и потери от дефицита товара. Описываемая непрерывная модель учитывает неопределенность спроса. Случай с неопределенностью времени поставки был рассмотрен в работе [2].

В рассматриваемой модели делается предположение о том, что отсутствует вероятность задержки или преждевременного привоза заказанной партии товара, т.е. если делается заказ на момент времени t*, то товар приходит именно в этот момент.

Существует неопределенность относительно момента окончания товара α.

$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, где

α_0 — ожидаемое время окончания товара,

$\Delta\alpha$ — случайное отклонение.

Будем считать, что случайная величина $\Delta\alpha$ распределена по нормальному закону.

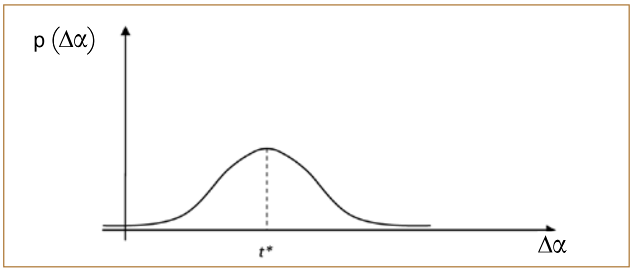

Рисунок 1

Функция плотности распределения случайной величины $\Delta\alpha$

Функция затрат, отражающая эффективность принятой стратегии управления запасами, в нашем исследовании учитывает следующие издержки:

- расходы на хранение;
- издержки дефицита (в данном случае это упущенная выгода), пропорциональные времени отсутствия требуемого количества товара на складе.

Издержки хранения товара в объеме Q после поставки на интервале времени до момента реального обнуления товара α в случае, когда поставка товара пришлась на более ранний срок t* (t* < α), составят $I = c \cdot Q \cdot (\alpha - t^*)$, где c =const — суточная стоимость хранения единицы продукции.

В противном случае, при неполном удовлетворении спроса, когда t* > α, возникают издержки дефицита товара на промежутке от момента реального обнуления товара α и до момента поставки в объеме Q:

$$I = \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot (t^* - \alpha),$$

где z=const — прибыль от продажи единицы продукции,

$\alpha_0 = E\alpha \frac{Q}{\alpha_0}$, представляет собой средний суточный объем продаваемого товара.

Общие издержки:

$$I + D = \begin{cases} Q \cdot c \cdot (\alpha - t^*), & \alpha < t^* \\ \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot (t^* - \alpha), & t^* > \alpha \end{cases}$$

В качестве функции суммарных затрат, являющейся в стохастических моделях случайной величиной, рассматриваем ее математическое ожидание.

В описываемой модели с непрерывной случайной величиной $\Delta\alpha$, характеризующей неопределенность спроса, имеющей закон распределения $p(\Delta\alpha)$, математическое ожидание суммарных издержек примет вид:

$$F(t^*) = \int_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot (t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha)\rho(\Delta\alpha)d\Delta\alpha + \int_{t^*-\alpha_0}^{\infty} c \cdot Q \cdot (\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*)\rho(\Delta\alpha)d\Delta\alpha \quad (1)$$

Поставленная авторами задача управления запасами состоит в отыскании такого момента назначения поставки t*, при котором математическое ожидание суммарных затрат будет минимальным.

Рассмотрим первое слагаемое выражения (1):

$$F_1(t^*) = \int_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot (t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha)\rho(\Delta\alpha)d\Delta\alpha = \int_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot t^* \cdot \rho(\Delta\alpha)d\Delta\alpha -$$

$$- \int_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} Q \cdot z \cdot \rho(\Delta\alpha)d\Delta\alpha - \underbrace{\int_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot \Delta\alpha \cdot \rho(\Delta\alpha)d\Delta\alpha}_{Ic} = \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot t^* \cdot \Phi(t^* - \alpha_0) -$$

$$- Q \cdot z \cdot \Phi(t^* - \alpha_0) - \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} \Delta\alpha \cdot \rho(\Delta\alpha)d\Delta\alpha}_{Ic}$$

Рассмотрим интеграл Ic

$$\int_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} \Delta\alpha \cdot \rho(\Delta\alpha)d\Delta\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} \Delta\alpha\, e^{-\frac{\Delta\alpha^2}{2}} d\Delta\alpha$$

Положим $\Delta\alpha^2 = U, \quad 2(\Delta\alpha)d\Delta\alpha = dU$, тогда

$$Ic = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} e^{-\frac{U}{2}} dU = \left| -\frac{U}{2} = z, \quad dz = -\frac{1}{2}dU, \quad dU = -2dz \right| =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t^*-\alpha} e^z dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} -e^z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{t^*-\alpha_0} -e^{-\frac{\Delta\alpha^2}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(t^*-\alpha_0)^2}{2}}$$

Тогда первое слагаемое примет вид:

$$F_1(t^*) = \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot t^* \cdot \Phi(t^* - \alpha_0) - Q \cdot z \cdot \Phi(t^* - \alpha_0) + \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(t^*-\alpha_0)^2}{2}}$$

Аналогично, второе слагаемое выражение (1) запишется как:

$$F_2(t^*) = c \cdot Q \cdot \alpha_0 \cdot (1 - \Phi(t^* - \alpha_0)) + c \cdot Q \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(t^*-\alpha_0)^2}{2}} - c \cdot Q \cdot t^* \cdot (1 - \Phi(t^* - \alpha_0))$$

Тогда общий интеграл примет вид:

$$F(t^*) = F_1(t^*) + F_2(t^*) = \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot t^* \cdot \Phi(t^* - \alpha_0) - Q \cdot z \cdot \Phi(t^* - \alpha_0) + \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(t^*-\alpha_0)^2}{2}} +$$

$$+ c \cdot Q \cdot \alpha_0 \cdot (1 - \Phi(t^* - \alpha_0)) + c \cdot Q \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(t^*-\alpha_0)^2}{2}} - c \cdot Q \cdot t^* \cdot (1 - \Phi(t^* - \alpha_0))$$

Для отыскания минимума ожидаемых издержек возьмем производную:

$$F'(t^*) = \frac{Q}{\alpha_0} \cdot z \cdot \Phi(t^* - \alpha_0) - c \cdot Q + c \cdot Q \cdot \Phi(t^* - \alpha_0)$$

,

и приравнивая ее к нулю, найдем момент t*

$$t^* = \alpha_0 + \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha_0 \cdot c}{z + \alpha_0 \cdot c}\right)$$

Итак, описанная модель позволяет получить ответ на вопрос, на какой день назначать доставку новой партии товара определенного количества при случайном спросе, чтобы добиться минимума среднеожидаемых общих издержек.

Библиографический список:

1. *Степанов В.И. Логистика: Учебник. — М.: ТК Велби, Изд-во «Проспект», 2006. — 488 с.*
2. *Косоруков О.А., Свиридова О.А. Стохастическая непрерывная модель управления запасами // Вестник РЭУ. — 2012. — № 4.*
3. *Свиридова О.А. Имитационные модели в задачах управления запасами // Известия РЭУ им. Г.В. Плеханова [Электронный научный журнал]. —М., 2011. — № 2.*