ИНВАРИАНТНЫЕ К УБЫВАНИЮ ТАРИФОВ ПОРЯДКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАКАЗОВ

ГЕННАДИЙ БРОДЕЦКИЙ
НИУ-ВШЭ
профессор,
д.т.н.

ЕКАТЕРИНА ТОКАРЕВА
НИУ-ВШЭ
доцент,
к.э.н.

ВВЕДЕНИЕ

Эффективность звеньев цепей поставок можно повышать, используя скрытый резерв снижения издержек обслуживания: потери можно сокращать за счет правильного выбора порядка обслуживания заказов (см., например, [1–4]) из заданного их множества (называемого далее портфелем), подлежащего выполнению. Модели снижения указанных издержек часто оказываются более сложными, чем традиционно представляемые в теории сетей обслуживания. В частности, тарифы штрафов могут быть функциями времени, причем зависеть от того, как долго заказ ожидает начала своего обслуживания. Такие модели могут быть обусловлены, в частности, ситуациями, когда учет издержек и потерь, связанных с обслуживанием заказов портфеля, необходимо реализовать в формате схемы непрерывного начисления процентов.

В [5] было начато исследование моделей, учитывающих ситуации, когда тарифы издержек снижаются со временем по указанной схеме, которую в финансовом анализе называют схемой непрерывных процентов. Оказалось, что в общем случае оптимальная стратегия зависит от конкретного вида закона распределения вероятностей времени выполнения заказов.

Чтобы облегчить менеджерам процедуры оптимизации для таких ситуаций, в данной статье будет доказан и впервые представлен следующий интересный и важный результат: при экспоненциальных длительностях обслуживания заказов портфеля, а также геометрических законах их распределения учет снижения тарифов штрафов в задачах указанного типа не влияет на традиционное правило определения оптимальной стратегии обслуживания заказов. В указанных ситуациях для алгоритма оптимизации порядка выполнения заказов останется справедливым оптимальное $c\mu$-правило теории сетей обслуживания.

АТРИБУТЫ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ПОРЯДКА ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАКАЗОВ ПРИ СНИЖЕНИИ ТАРИФОВ ШТРАФОВ ВО ВРЕМЕНИ

Особенностью рассматриваемой здесь модели, как и в [5], является то, что в основе концепции учета издержек от обслуживания заказов лежит принцип непрерывного изменения тарифов штрафов во времени. В каждый момент времени тариф штрафа для заказа, характеризующий интенсивность издержек по такому заказу, является функцией времени. Заданы параметры модели:

N — число заказов в портфеле (заказ под номером i называем i-заказом);

S_i — длительности обслуживания i-заказов, которые предполагаются случайными и независимыми в совокупности, а M $[S_i]$ — их математические ожидания;

μ_i — интенсивность обслуживания i-заказа ($\mu_i = 1/M\,[S_i]$);

c_i — исходная интенсивность штрафа для i-заказа в момент формирования портфеля (т.е. $c_i = c_i(0)$);

$c_i(t) = c_i \cdot e^{-\delta t}$ — интенсивность таких издержек в момент времени t (убывающая функция переменной t);

$\delta = ln(1+r)$, где r — ставка снижения тарифов штрафов на одном периоде, в качестве которого принимается один год (т.е. такая ставка задана в годовых);

$i = (i_1, i_2, \ldots , i_N)$ — вектор, задающий очередность выполнения заказов портфеля;

T_i — момент окончания выполнения i-заказа, т.е. момент окончания учета штрафов по этому заказу.

Поскольку указанная ставка r задана в годовых, то соответствующие показатели времени (показатели T_i и S_j) также предполагаются заданными в указанных единицах измерения.

Суммарный штраф для еще не обслуженного i-заказа на промежутке времени (t_1, t_2) определяется как интеграл $\int_{t_1}^{t_2} c_i(t)dt$.

АННОТАЦИЯ
Впервые анализируются модели минимизации потерь или штрафов, обусловленных обслуживанием портфелей заказов в цепях поставок, формат которых позволяет утверждать, что учет снижения тарифов штрафов во времени не изменяет оптимальную стратегию. Доказано, что указанная особенность всегда имеет место при экспоненциальных и геометрических законах распределения вероятностей для длительностей обслуживания заказов. Представлены приложения для цепей поставок предприятий мясной гастрономии.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Портфели заказов, издержки обслуживания, изменение тарифов штрафов во времени, выбор порядка обслуживания, оптимальное правило, цепи поставок предприятий мясной гастрономии.

ANNOTATION
For the first time the models minimize losses or penalties attributable service portfolios of orders for supply chains, the format of which allows to assert, that the account of the tariff reduction of fines in time does not change the optimal strategy. It is proved that this feature is always in place when the exponential and geometrical laws of probability distributions for the duration of the service orders. Application is given to the supply chains of the enterprises of the meat gastronomy.

KEYWORDS
The portfolios of orders, the costs of the service, change tariff penalties in time, the choice of the order of the service, the optimal rule, the supply chains of the enterprises of the meat gastronomy.

ШТРАФОВ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ В ЦЕПЯХ ПОСТАВОК (ЧАСТЬ 1)

Пребывание *i*-заказа в системе с момента времени формирования портфеля (момент t=0) и до момента окончания обслуживания этого заказа (момент T_i) влечет суммарный штраф $\int_0^{T_i} c_i(t)dt$ с математическим ожиданием $M\,(\int_0^{T_i} c_i(t)dt)$.

Рассматриваемая модель предполагает *снижение (дисконтирование) тарифов штрафов во времени*. Для такой модели с учетом аналога формата схемы непрерывных процентов, но применительно к ситуации снижения указанных тарифов имеем: $c_i(t)= c_i \cdot e^{-\delta t}$, *где* $\delta \geq 0$. При этом c_i — параметр интенсивности штрафа по *i*-заказу на момент начала учета издержек (момент $t=0$ формирования исходного портфеля заказов), причем $c_i\,(0) = c_i$.

Величина суммарных издержек по всему портфелю составит $\sum_{i=0}^{N} M \int_0^{T_i} c_i(t)dt$. Это случайная величина (поскольку Ti являются случайными величинами). Задача состоит в том, чтобы найти оптимальный порядок обслуживания заказов портфеля, при котором минимизируются суммарные ожидаемые потери из-за штрафов: $M\,(\sum_{i=0}^{N} M \int_0^{T_i} c_i(t)dt) \rightarrow min$, где $ci(t)= c_i \cdot e^{-\delta t}$.

Поэтому $\int_0^{T_i} c_i\, e^{-\delta t}\, dt = \frac{1}{\delta}\, c_i\,(1- e^{-\delta Ti}\,)$.

Соответственно, задача оптимизации имеет вид:

$$M(\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{\delta} \cdot c_i \cdot (1 - e^{-\delta T_i})) \rightarrow \min . \qquad (1)$$

Такая задача оптимизации уже рассматривалась и была решена в [5]. Ее решение позволило модифицировать традиционное правило оптимизации порядка выполнения заказов (так называемое оптимальное *cμ*-правило) для теории сетей обслуживания применительно к формату указанной модели. Суть такой модификации состоит в следующем.

Сначала определяются вспомогательные параметры $c_i(mod)$, которые модифицируют тарифы штрафов применительно к формату такой модели. Их надо задать равенствами:

$$c_i(mod) = \mathrm{M}(c_i \cdot e^{-\delta S_i}),\ i = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}. \qquad (2)$$

Кроме того, определяются модифицированные параметры для интенсивностей обслуживания заказов портфеля $\mu_i(mod)$ по формулам:

$$\mu_i(mod) = \frac{1}{M(1 - e^{-\delta S_i})/\delta},\ i=1, 2, \ldots, \mathrm{N}. \qquad (3)$$

При этом традиционный алгоритм теории сетей обслуживания для оптимизации порядка выполнения заказов портфеля модифицируется следующим образом: оптимальному порядку обслуживания заказов соответствует убывание специальных индексов заказов $I(_i) = c_i(mod) \cdot \mu_i(mod)$. Указанный новый алгоритм надо использовать вместо традиционного правила оптимизации для сетей обслуживания [1], согласно которому оптимальный порядок выполнения заказов надо определять по убыванию более простых индексов, соотносимых с заказами, по формулам $I(i) = c_i \cdot \mu_i$ (традиционный формат оптимального *cμ*-правила).

В этой статье будет показано, что в случае *экспоненциальных* и *геометрических* законов распределения длительностей обслуживания заказов результаты оптимизации для задачи (1) по указанному модифицированному правилу и традиционному варианту такого правила (см., например, [1]) всегда будут совпадать. Это позволит при оптимизации реальных цепей поставок: 1) опускать процедуры усреднения показателей тарифов $c(mod)$, и интенсивностей обслуживания $\mu(mod)$; 2) использовать простые традиционные процедуры оптимизации для снижения издержек обслуживания.

ВОЗМОЖНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ НАИЛУЧШЕЙ СТРАТЕГИИ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУР ТРАДИЦИОННОГО ПРАВИЛА ОПТИМИЗАЦИИ

Как уже было отмечено, для реализации оптимальной стратегии необходимо определять специальные показатели, которые содержат выражения $M\,(e^{-\delta S_i})$. Они будут зависеть от вида конкретного закона распределения вероятностей для длительностей обслуживания заказов S_i. Это усложняет практическое использование указанных выше оптимальных стратегий. Докажем, что при *экспоненциальных* и *геометрических* законах распределения длительностей обслуживания заказов для нахождения оптимальной стратегии всегда можно использовать простой традиционный алгоритм (без дополнительных модификаций его процедур) традиционного оптимального *cμ*-правила.

СПЕЦИФИКА МОДЕЛЕЙ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ЗАКАЗОВ

Пусть плотности распределения вероятностей для длительностей обслуживания заказов портфеля S_i имеют вид $f(x) = \lambda_i \cdot exp\,\{-\lambda_i \cdot x\},\ x \geq 0$. Здесь, как это принято в теории вероятностей, параметры λ_i представляют интенсивности обслуживания *i*-заказов для указанных видов законов распределения. Они связаны с математическими ожиданиями длительностей обслуживания заказов равенствами $M(S_i) = 1/\lambda_i$ (соответственно, как видим, в наших обозначениях имеет место равенство $\lambda_i = \mu_i$ для этих параметров, которые используются соответственно в теории вероятностей и в теории сетей обслуживания). Покажем, что в случае *экспоненциального обслуживания заказов* наилучший порядок выполнения заказов по представленным выше оптимальным модифицированным процедурам всегда будет совпадать с результатом оптимизации по традиционному алгоритму оптимального *cμ*-правила. Обоснование этого представим, пользуясь прямыми методами.

Как уже было отмечено выше, для модели с облегчением тарифов штрафов во времени (в формате схемы непрерывного начисления процента) наилучший порядок выполнения заказов портфеля определяется величиной специального индекса $I(i)$. Он определяется равенством $I(i) = c_i(mod)\ \mu_i(mod)$. С учетом формул (2) и (3) представим это равенство в следующем виде: $I(i) = c_i\ \delta\, M\,(e^{-\delta S_i})/\ M\,(1 - e^{-\delta S_i})$. Если длительности обслуживания заказов портфеля имеют экспоненциальные законы распределения вероятностей, то для $M\,(e^{-\delta S_i})$, по определению, получаем:

$$M(e^{-\delta S_i}) = \int_0^{\infty} e^{-\delta u} \cdot \lambda_i \cdot e^{-\lambda_i u} du = \lambda_i \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\delta+\lambda_i)u} du = \frac{\lambda_i}{\delta + \lambda_i}. \qquad (4)$$

Наконец, используя (4), для указанного выше индекса $I(i)$ находим следующее представление:

$$I(i) = \frac{c_i \cdot \delta \cdot \dfrac{\lambda_i}{\delta + \lambda_i}}{1 - \dfrac{\lambda_i}{\delta + \lambda_i}} = \frac{c_i \cdot \delta \cdot \lambda_i}{\delta} = c_i \lambda_i = c_i \mu_i \qquad (5)$$

(напомним, в наших обозначениях $c_i\,\lambda i = c_i\mu_i$).

Итак, при экспоненциальных законах распределения длительностей обслуживания заказов для индекса $I(i) = ci(mod)\mu_i(mod)$ в силу (5) имеет место цепочка равенств: $I(i) = ci(mod)\mu_i(mod) = c_i\mu_i$. Таким образом, в указанном случае процедуры оптимизации порядка выполнения заказов портфеля по модифицированному c(mod)μ(mod)-правилу и по традиционному cμ-правилу всегда дадут одинаковые результаты.

СПЕЦИФИКА МОДЕЛЕЙ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пусть случайные величины S_i являются целочисленными с геометрическими законами распределения вероятностей. Это подразумевает, что имеет место следующая особенность. Завершение обслуживания заказов может происходить лишь в моменты времени, кратные некоторому периоду Δ, который принимается за единицу. Масштаб измерения времени выбирается произвольным образом (единицей времени Δ могут выступать любые промежутки времени, например, дни, недели, декады и т.д.). При этом требование геометрического закона распределения вероятностей для S_i означает следующее. Для любого целого числа $k \geq 1$ вероятности случайных событий $\{S_i = k\}$ определяются по формулам $P\{S_i = k\} = p_i \cdot q_i^{\,k-1}$, где $0 < p_i < 1$ и $p_i + q_i = 1$. При этом вероятности $p_i = P\{S_i = 1\}$ в формате схемы Бернулли представляются как вероятности успеха (т.е. завершения процедур обслуживания) в одном испытании (т.е. на очередном периоде Δ, который принят за единицу измерения времени). Параметры p_i связаны с математическими ожиданиями длительностей обслуживания заказов равенствами $M(S_i) = 1/p_i$. Покажем, что и в указанном случае результат нахождения наилучшего порядка выполнения заказов по найденным и представленным в [5] модифицированным процедурам оптимизации (для учета снижения тарифов штрафов во времени) всегда будет совпадать с результатом оптимизации по традиционному для теории сетей обслуживания $c\mu$-правилу (без дополнительного учета в его структуре требуемых и отмеченных выше процедур модификации).

Найдем $M(e^{-\delta S_i})$. Учитывая геометрический закон распределения вероятностей для случайных величин S_i, имеем

$M(e^{-\delta S_i}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta S_i} q_i^{\,k-1} p_i$. Вынесем за скобки $e^{-\delta} \cdot p_i$ в последнем представлении $M(e^{-\delta S_i})$. Тогда $M(e^{-\delta S_i}) = e^{-\delta} \cdot p_i \cdot [1 + z + z^2 +\ldots + z^k +\ldots]$, где $z = e^{-\delta} q_i$. Сумма степенного ряда в квадратных скобках будет конечной (ряд будет сходиться), если будет выполняться условие $z < 1$.

В исходных параметрах это условие имеет вид $e^{-\delta} q_i < 1$. Проверим, будет ли оно выполняться применительно к практическим ситуациям обслуживания заказов для цепей поставок в логистике.

Перепишем указанное условие в виде $e^{-\delta} < q_i^{-1}$ или в виде $e^{-\delta} > qi$. Это эквивалентно выполнению неравенства $e^{-\delta} > 1 - p_i$. Учитывая, что в формате схемы непрерывных процентов имеет место равенство $e^{-\delta} = 1 + r$ и, кроме того, $M(S_i) = 1/p_i$, последнее неравенство можно переписать в следующем виде:

$$r + M(S_i)^{-1} > 0.$$

В этом представлении видно, что сходимость рассматриваемого степенного ряда всегда будет иметь место, так как оба слагаемых в левой части последнего неравенства положительны.

Вернемся к нахождению величины $M(e^{-\delta S_i})$. Как было показано, рассмотренный выше степенной ряд $[1 + z + z^2 +\ldots + z^k +\ldots]$ всегда сходится. Его сумма будет равна $[1 + z + z^2 +\ldots + z^k +\ldots] = 1/(1 - e^{-\delta} q_i)$. Воспользуемся равенством $e^{-\delta} = 1 + r$ и для $M(e^{-\delta S_i})$ получим представление $M(e^{-\delta S_i}) = p_i/(1+r - q_i)$. Аналогично для $M(1 - e^{-\delta S_i})$ имеет место представление $M(1 - e^{-\delta S_i}) = r/(1 + r - q_i)$. Используя найденные соотношения для $M(e^{-\delta S_i})$ и $M(1 - e^{-\delta S_i})$ находим показатели $c_i(mod)$ и $\mu_i(mod)$, по которым необходимо определять индекс $I(i)$ для модели с облегчением тарифов штрафов во времени [5]:

$$c_i(mod) = c_i p_i/(1+r - q_i);\; \mu_i(mod) = \delta(1+ r - q_i)/r.$$

Наконец,

$$I(i) = \frac{c_i \cdot \delta \cdot p_i}{r_i} = \frac{c_i \cdot \delta}{r \cdot M(S_i)} = c_i \mu_i \cdot \frac{\delta}{r}.$$

Как видим, при нахождении индексов $I(i)$ множитель δ/r оказался одинаковым для всех заказов портфеля (если соотносить/сравнивать такой индекс с произведением $c_i\mu_i$ применительно к каждому заказу портфеля).

Напомним, что для нахождения оптимальной стратегии заказы портфеля надо упорядочить по убыванию величины указанных индексов $I(i)$. Соответственно индексы $I(i)$ можно оценивать не по формулам $I(i) = c_i\,(mod)\,\mu_i\,(mod)$, а на основе более простых показателей, определяемых равенствами $I(i) = c_i\mu_i$.

Итак, оптимальный порядок выполнения заказов портфеля по модифицированному $ci(mod)\mu i(mod)$-правилу и оптимальный порядок выполнения заказов портфеля по традиционному для сетей обслуживания оптимальному $c\mu$-правилу всегда дадут один и тот же результат (при геометрических законах распределения длительностей обслуживания заказов портфеля).

Соответственно в такой ситуации менеджер может пренебречь процедурами дополнительной модификации и находить оптимальную стратегию обслуживания заказов на основании простого варианта для традиционного правила оптимизации. При этом, разумеется, достаточно знать только характеристики первых моментов (т.е. оценки для математического ожидания) длительностей обслуживания заказов.

Иллюстрации возможностей использования полученных результатов в конкретных цепях поставок производственных предприятий мясной гастрономии будут представлены во второй части статьи.

Библиографический список:

1. *Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. — М.: Мир, 1993. — 336 с.*
2. *Бродецкий Г.Л. Минимизация издержек обслуживания портфеля заказов при случайных тарифах штрафных функций // РИСК. — 2009. — № 3.*
3. *Бродецкий Г.Л. Оптимальный порядок обслуживания заказов в цепях поставок с учетом рисков потерь доходов и инфляции // Логистика и управление цепями поставок. — 2009. — № 5.*
4. *Бродецкий Г.Л. Резервы снижения издержек обслуживания заказов в цепях поставок // Логистика сегодня. — 2009. — № 6.*
5. *Бродецкий Г.Л. Снижение издержек обслуживания заказов в цепях поставок при переменных тарифах штрафов // РИСК. — 2010. — № 3.*