УПРАВЛЕНИЕ ЦЕПЯМИ ПОСТАВОК ПРИ МНОГИХ КРИТЕРИЯХ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНОГО СПРОСА

ГЕННАДИЙ БРОДЕЦКИЙ
РЭУ
им Г. В. Плеханова,
НИУ-ВШЭ,
профессор,
д. т. н.

ЕКАТЕРИНА ВОЛОБУЕВА
РЭУ
им. Г. В. Плеханова,
аспирант

В настоящей статье рассматривается модель одной из основных задач логистики — задача оптимального управления товарными потоками от производителя товаров к потребителю. Формат модели предусматривает N-шаговый процесс поставок товара от производителя к продавцу, причем на каждом шаге выбирается размер заказа и наценка для цены реализации товара (при этом учитывается специфика случайного спроса). Задача впервые формализуется как задача многокритериальной оптимизации основных параметров процесса поставки товаров потребителям для ситуации, когда критерии оптимизации соотносятся с требованиями обеспечения заданных вероятностей получения как гарантированной прибыли, так и гарантированной рентабельности. Представлен алгоритм, позволяющий менеджеру находить наилучшие параметры для цепи поставок на каждом шаге указанного процесса.

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МОДЕЛИ

Рассматривается N-шаговый экономический процесс, включающий трех участников: производителя, продавца и покупателя товаров. По заявке продавца производитель товаров к началу каждого шага поставляет продавцу согласованное количество L единиц товара по закупочной цене Δ, которая задана производителем, $L > 0$. Спрос на товар на один шаг ζ есть случайная величина с известным законом распределения $F_\zeta(x)$. Значения спроса, относящиеся к разным шагам, принимаются независимыми, но могут иметь разные функции распределения вероятностей.

Продавец осуществляет поставку L единиц товара покупателю по цене реализации (Δ+a), где a есть наценка продавца. Модель учитывает, что возможны убытки продавца, связанные с неудовлетворенным спросом ($x - L$) по цене c и связанные с продажей избытка ($L - x$) единиц товара по сниженной цене b_0, где:

- x — значение случайной величины ζ на этом шаге;
- c — издержки продавца, связанные с неудовлетворенным спросом в случае, если спрос на рынке превышает предложение ($x > L$);
- b_0 — принятая в модели сниженная цена реализации избыточного товара в случае, если предложение превышает спрос на рынке ($x < L$);
- b — убытки, связанные с продажей единицы избыточного товара по сниженной цене ($b = \Delta - b_0$) в случае, если предложение превышает спрос на рынке ($x < L$).

Предполагается, что потребительская ценность товара сохраняется только на протяжении одного шага. Соответственно, излишки партии поставки на одном шаге (когда спрос меньше, чем размер заказа) обусловят указанные выше потери.

Оптимальное поведение продавца на всем N-шаговом интервале в силу принятых допущений определяется его оптимальным поведением на каждом шаге. Поэтому ниже рассматривается задача определения на каждом шаге следующих параметров рассматриваемого экономического процесса:

- значений объема поставки товара (предложения) L;
- наценки a (цены реализации (Δ+a)).

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ И ИХ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- вероятность получения прибыли не меньшей, чем заданная величина g_0 (назовем кратко: вероятность гарантированной прибыли и обозначим $P\{g \geq g_0\}$);
- вероятность достижения рентабельности не меньшей, чем заданная величина R_0 (назовем кратко: вероятность гарантированной рентабельности и обозначим $P\{R \geq R_0\}$);
- наценка a будет выбрана продавцом в зависимости от постановки задачи оптимизации;
- объем поставок L будет выбран продавцом в зависимости от постановки задачи оптимизации.

АННОТАЦИЯ
Статья посвящена изложению алгоритма оптимизации параметров (объема заказа и цены реализации) процесса поставки и реализации товаров потребителям при случайном спросе.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Многокритериальная оптимизация, вероятность гарантированной прибыли, вероятность гарантированной рентабельности, размер предложения (заказа), цена реализации.

ANNOTATION
The article is devoted to algorithm of optimizing the parameter (volume of order and sell price) of the delivery and sell process of goods to consumers by random demand.

KEYWORDS
Multicriteria optimization, probability of guaranteed profit, probability of guaranteed profit margin, the size of the order, selling price.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОСТАВКАМИ

В рамках рассматриваемого экономического процесса, задаваемого выше указанной последовательностью шагов, требуется найти:

- объем поставки товара (размер заказа) L;
- наценку а (цену реализации $(\Delta+a)$);
- вероятность гарантированной прибыли $P\{g \ge g_0\}$;
- вероятность гарантированной рентабельности $P\{R \ge R_0\}$.

Указанные параметры должны оптимизировать следующие частные критерии:

- критерий К1: минимизация наценки (естественно, что большая величина наценки может понизить спрос),
  $a \Rightarrow min$; (1)
- критерий К2: максимизация вероятности гарантированной прибыли, $P\{g \ge g_0\} \Rightarrow max$; (2)
- критерий К3: максимизация вероятности гарантированной рентабельности, $P\{R \ge R_0\} \Rightarrow max$ (3)

ФОРМАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ

Прибыль продавца определяется соотношением [1]:max

$$g(v \mid a, L) = \begin{cases} L\big((a+b)v - b\big), v \le 1 \\ L(a+c-cv), v > 1 \end{cases}, \text{ где}$$

$b = \Delta - b_0$ убытки, связанные с продажей единицы избыточного товара по сниженной цене ($b = \Delta - b_0$) в случае, если предложение превышает спрос на рынке ($x < L$);

$V = \dfrac{\zeta}{L}$ — *нормированный спрос (случайная величина);*

v — значение нормированного спроса.

Тогда для вероятности гарантированной прибыли $P\{g \ge g_0\}$, т. е. для вероятности получить прибыль не меньшую, чем заданная величина, имеем следующее выражение:

$$P\{g(v|a,L) \ge g_0\} \equiv P_g(a,L) = P\left\{\frac{g_0/L + b}{a+b} \le V < \frac{a+c-g_0/L}{c}\right\} =$$
$$= F_V\left(\frac{a+c-g_0/L}{c}\right) - F_V\left(\frac{g_0/L + b}{a+b}\right) = F_\xi\left(\frac{L(a+c)-g_0}{c}\right) - F_\xi\left(\frac{g_0+bL}{a+b}\right) \quad (4)$$

Функция $P_g(a, L)$ неотрицательна при $L \ge \dfrac{g_0}{L}$, монотонно возрастает по a, а по L изменяется от 0 при $L = \dfrac{g_0}{a}$ до 0 на ∞ достигая положительного максимума в точке $L^*_g(a)$, зависящей от значения a. Следовательно, для определения этой точки производную

$$\frac{d}{dL} P_g(a, L)$$

необходимо приравнять к 0 и решить полученное уравнение:

$$\frac{d}{dL} P_g(a, L) = 0.$$

Это уравнение позволяет далее найти оптимальное значение $L^*_g(a)$, максимизирующее прибыль на данном шаге процесса цепи поставок. Такие процедуры являются стандартными и поэтому опускаются (иллюстрируются в примере).

Теперь рассмотрим выражение для вероятности достижения гарантированной рентабельности (R_0). Оно аналогично (4) и будет иметь следующий вид:

$$P_R(a,L) \equiv P\{R > R_0\} = F_\xi\left(L\left(\frac{a-\Delta R_0}{c(1+R_0)}+1\right)\right) - F_\xi\left(L\frac{\Delta R_0 + b}{a+b}\right) \quad (5).$$

Из (5) следует, что функция $P_R(a, L)$ монотонно возрастает по a. По переменной L она изменяется от 0 при $L = 0$ до 0 на ∞, достигая максимума в некоторой точке Li*(a), зависящей от a. Эта точка может быть получена в результате решения уравнения:

$$\frac{d}{dL} P_R(a, L) = 0.$$

Это уравнение позволяет далее найти оптимальное значение $L^*_R(a)$, максимизирующее рентабельность на данном шаге процесса цепи поставок.

Учитывая отмеченные особенности функций (4) и (5), придадим задаче многокритериальной оптимизации (1)-(3) следующий вид. Требуется найти параметры процесса поставки товаров потребителям, величины наценки и объема поставки (предложения), и , удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} &P_g(a, L) \ge P_{go} \\ &P_R(a, L) \ge P_{Ro}, \text{ где} \\ &a \Rightarrow \mathbf{min} \end{aligned} \quad (6)$$

P_{go} и P_{Ro} — минимально допустимые значения вероятностей получения заданной прибыли и достижения заданной рентабельности соответственно.

Задачу оптимизации (6) следует понимать так: из множества пар (a, L), удовлетворяющих двум неравенствам, указанным в (6) и обеспечивающим требуемые вероятности достижения гарантированной прибыли и гарантированной рентабельности, следует выбрать подмножество таких пар, для которых наценка принимает минимальное значение.

Если это подмножество включает несколько пар, то из них следует выбрать такую пару, для которой предложение L принимает минимальное значение. Это обусловлено тем, что, при меньшем значении заказа L, затраты на поставку товара на данном шаге будут меньшими (при обеспечении требуемой вероятности достижения гарантированной прибыли и гарантированной рентабельности).

Таким образом, задача (6) относится к классу задач так называемой лексикографической минимизации [5] на множестве, заданном системой (в данном случае нелинейных) неравенств. Нижеследующий алгоритм позволяет найти ее решение.

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕПИ ПОСТАВОК

Шаг 1. На этом шаге рассматриваемая задача модифицируется в задачу дискретной оптимизации. При этом допустимое множество значений параметров a и L характеризует приемлемую точность решений для этих параметров. Поэтому строим две последовательности $0 \le a_1 < a_2 < ... < a_i < ...$ и $0 < L_1 < L_2 < ...$ Здесь значения разностей $a_i - a_{i-1}$ и $L_i - L_{i-1}$ определяют задаваемую точность решения по a и по L соответственно.

Шаг 2. Фиксируем значение a_1. При этом вычисляем последовательно вероятности $P_g(a_1, L_i)$ и $P_R(a_1, L_i)$ для i = 1, 2.... Затем определяем интервалы $I^g\{L^g_1 < L < L^g_2\}$ и $I^R\{L^R_1 < L < L^R_2\}$ значений L, для которых выполняются неравенства

$P_g(a_4, L) \ge P_{go}$

$P_R(a_1, L) \ge P_{Ro}$.

Шаг 3. Если $I^g \cap I^R = \varnothing$, то решения задачи (6) с $a = a_1$ не существует и следует перейти к анализу следующих значений наценок $a = a_2$, $a = a_3$ и т.д. В противном случае (когда $I^g \cap I^R \ne \varnothing$), выбирается интервал из множества $I^g \cap I^R$ с наименьшим значением $L^*(a_1)$. При этом оптимальное решение задачи (6) принимает вид $(a_1, L^*(a_1))$.

Для сокращения объема вычислений заметим: если выполняется хотя бы одно из неравенств

$P_g(a, L_g^*(a)) < P_{go}$

$P_R(a, L_R^*(a)) < P_{Ro}$,

где $L_g^*(a)$ и $L_R^*(a)$ — значения предложений, максимизирующих вероятности получения заданной прибыли $P_g(a, L)$ и достижения заданной рентабельности $P_R(a, L)$ соответственно при фиксированной наценке a, то решений вида (a, L) при данном a не существует.

Пример (оптимизация параметров процесса поставки товаров потребителям при нормальном законе распределения спроса)

Рассмотрим представленную выше модель оптимизации параметров цепи поставок для ситуации, когда спрос распределен нормально, т.е. $\zeta \in N(m, \sigma^2)$ с параметрами m = 9 ед. и $\sigma^2 = 9$ ед.

Кроме того, используем следующие параметры и показатели:

- цена производителя (закупочная цена) $\Delta = 20$ условных денежных единиц (далее — у.д.е.);
- убытки, связанные с продажей единицы избыточного товара по сниженной цене ($b = \Delta - b_o$) в случае, если предложение превышает спрос на рынке ($x < L$) и издержки, связанные с неудовлетворенным спросом с (когда спрос на рынке превышает предложение) принимаются равными 4 у. д. е., b = c = = 4 у.д.е.;
- значение гарантированной прибыли g_o задается равным 50 у.д.е., $g_o = 50$ у.д.е. (т. е. в рамках принятых понятий это означает, что величина прибыли должна быть не менее 50 у.д.е.);
- значение гарантированной рентабельности R_o задается равной 80% от максимально возможной рентабельности (т. е. $R_o = 0{,}80\frac{a}{\Delta} = 0{,}04a$);
- значения вероятности гарантированной прибыли и гарантированной рентабельности для удобства будут уточняться в зависимости от значений наценки.

Требуется найти наценку а и размер предложения L, при которых выполняются условия (6). При этом рассматривается случай, когда математическое ожидание спроса постоянно

$(m = CONST)$.

РЕШЕНИЕ

Анализ гарантированной прибыли. Сначала рассмотрим требование обеспечения заданной вероятности для гарантированной прибыли. После подстановки исходных данных в формулу (4) вероятность гарантированной прибыли можно представить в виде:

$$P_g(a,L) = F_N\left(\frac{L(a+c)-g_0}{c}\right) - F_N\left(\frac{g_0+bL}{a+b}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{L(a+4)}{12} - 7{,}17\right) - \Phi\left(\frac{50+4L}{3(a+4)} - 3\right),$$

где Φ — функция Лапласа

В табл. 1 представлены значения вероятностей гарантированной прибыли, которые были найдены по приведенной выше формуле.

Таблица 1

Вероятности гарантированной прибыли в зависимости от значений наценки и размера заказа

	a=10	a=30	a=50	a=70	a=100
L	$P_g(a, L_g^*(a))$	$P_g(a, L_g^*(a))$	$P_g(a, L_g^*(a))$	$P_g(a, L_g^*(a))$	$P_g(a, L_g^*(a))$
1	—	—	0,0000	0,155	0,930
2	—	0,0589	0,9623	**0,9969**	**0,9976**
2,5	—	0,4575	**0,9957**	0,9968	0,9975
3	—	0,8999	0,9956	0,9967	0,9975
5	—	**0,9897**	0,9949	0,9964	0,9972
6	0,3247	0,9885	0,9945	0,9962	0,9971
7	0,7140	0,9873	0,9941	0,9960	0,9970
8	**0,8373**	0,9860	0,9937	0,9957	0,9969
9	0,8291	0,9845	0,9932	0,9955	0,9968
10	0,8043	0,9829	0,9927	0,9953	0,9967
11	0,7769	0,9812	0,9922	0,9950	0,9965
12	0,7475	0,9793	0,9917	0,9947	0,9964
13	0,7161	0,9772	0,9911	0,9945	0,9962
14	0,6830	0,9750	0,9905	0,9942	0,9961
15	0,6484	0,9727	0,9899	0,9939	0,9959

Анализ гарантированной рентабельности. Теперь рассмотрим требование обеспечения заданной вероятности для гарантированной рентабельности. После подстановки исходных данных в формулу (5) вероятность гарантированной рентабельности можно представить в виде: где ,

$$P_R(a,L) = F_\xi\left(L\left(\frac{a-\Delta R_0}{c(1+R_0)}+1\right)\right) - F_\xi\left(L\frac{\Delta R_0+b}{a+b}\right) = F_\xi(LA) - F_\xi(LB) =$$

где

$$= \Phi\left(\frac{LA-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{LB-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{LA-9}{3}\right) - \Phi\left(\frac{LB-9}{3}\right),$$

$$\frac{a-\Delta R_0}{c(1+R_0)}+1 = \frac{0{,}09a+1}{0{,}04a+1}, - B = \frac{\Delta R_0+b}{a+b} = \frac{0{,}8a+4}{a+4},$$

Φ — функция Лапласа.

Построим табл. 2 для значений вероятности гарантированной рентабельности, вычисленных по приведенной выше формуле.

Таблица 2

Вероятности гарантированной рентабельности при различных значениях наценки и размера заказа

	a=10	a=30	a=50	a=70	a=100
L	$P_i(a, L_i^*(a))$	$P_i(a, L_i^*(a))$	$P_i(a, L_i^*(a))$	$P_i(a, L_i^*(a))$	$P_i(a, L_i^*(a))$
1	0,002	0,004	0,005	0,006	0,007
2	0,010	0,023	0,031	0,036	0,041
3	0,034	0,079	0,107	0,126	0,144
4	0,085	0,196	0,261	0,303	0,342
5	0,172	0,370	0,472	0,530	0,581
6	0,288	0,554	0,662	0,716	0,758
7	0,408	0,682	0,763	0,797	**0,820**
7,5	0,457	0,713	**0,776**	**0,799**	0,814
8	0,495	**0,720**	0,766	0,782	0,791
9	**0,524**	0,681	0,705	0,712	0,717
10	0,493	0,596	0,611	0,617	0,621
11	0,419	0,491	0,505	0,511	0,515
12	0,327	0,384	0,398	0,404	0,409
13	0,236	0,285	0,298	0,304	0,309
14	0,158	0,200	0,211	0,217	0,221
15	0,099	0,132	0,141	0,146	0,150

Предположим, что минимально допустимые значения вероятностей P_{go} и P_{Ro} при наценке a=10 у.д.е. равны соответственно 0,81 и 0,48, тогда минимально допустимое значение размера заказа L равно 8 ед. Рассмотрим случай, когда a=50 у.д.е., и предположим, что P_{go} = 0,99 и P_{Ro} = 0,66, тогда минимально допустимое значение размера заказа L равно 6 ед.

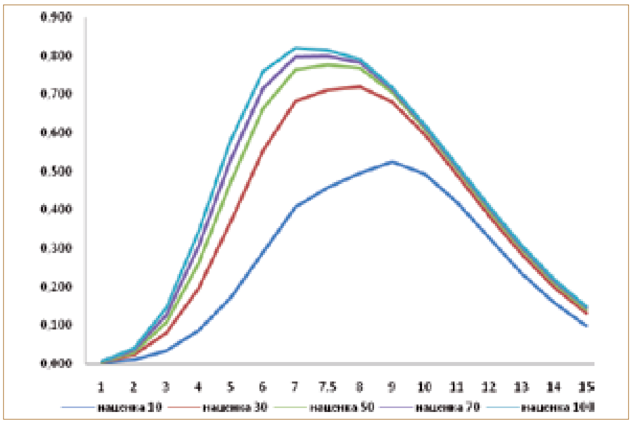

Рисунок 1

Зависимость вероятности гарантированной рентабельности от предложения при фиксированных значениях наценки

На рис. 1 представлены графики, характеризующие зависимость вероятности гарантированной рентабельности от предложения L при различных значениях наценки a. В частности, видно, что при наценке a=10 у.д.е. максимальная вероятность гарантированной рентабельности будет получена, если размер заказа будет равен L=9 ед. Кроме того, при наценке a=30 у.д.е. максимальная вероятность гарантированной рентабельности будет получена, если размер заказа будет равен L=8 ед. и т. д.

Максимальные значения указанных вероятностей и соответствующие им значения предложения выделены в табл. 1 и 2 жирным шрифтом.

В статье показано, что задачу оптимального управления товарными потоками от производителя товаров к потребителю можно рассматривать как задачу оптимизации при многих критериях. Представлен алгоритм такой оптимизации с учетом случайного спроса для ситуации, когда в качестве критериев выступают вероятность получения гарантированной прибыли и вероятность достижения гарантированной рентабельности.

Библиографический список:

1. *Е.Ю. Волобуева Детерминированная модель оптимизации объема поставок товара и цены его реализации по критерию прибыли // журнал «Современные аспекты экономики» № 24. — СПб.: Центр оперативной полиграфии, 2009.*
2. *Е.Ю. Волобуева Стохастическая модель определения объема товара и цены его реализации, максимизирующих математическое ожидание прибыли // журнал «Экономика и технологии», № 5(142). — М.: ГОУ ВПО «РЭА им. Г.В. Плеханова», 2009.*
3. *Е.Ю. Волобуева Возможности оптимизации объема заказа и цены реализации товара в цепи поставок // журнал «Логистика». — 2010. — №3.*
4. *Е.Ю. Волобуева Двухкритериальная детерминированная модель оптимизации объема заказа товара и цены его реализации в цепи поставок: Доклад на VI-ой международной научно — практической конференции «ЛОГИСТИКА-ЕВРАЗИЙСКИЙ МОСТ». — 2—3 марта 2011. — г. Красноярск.*
5. *В.В. Подиновский, В. М. Гаврилов Оптимизация по последовательно применяемым критериям. — М.: Сов. Радио, 1975.*

КОММЕНТАРИЙ СПЕЦИАЛИСТА-ПРАКТИКА

К СТАТЬЕ «УПРАВЛЕНИЕ ЦЕПЯМИ ПОСТАВОК ПРИ МНОГИХ КРИТЕРИЯХ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНОГО СПРОСА»

ОЛЬГА ХРУЩЕВА
Генеральный директор BrightColours. Управление цепями поставок

«ОСОБЫЙ ИНТЕРЕС СТАТЬЯ ВЫЗОВЕТ У ТЕХ, КТО РАБОТАЕТ В РИТЕЙЛЕ»

Поддержка процесса принятия решений в вопросах управления цепями поставок является одной из самых насущных проблем в силу сложности как формализации задач, так и ограниченного выбора применимых на практике методик для их решения. Думаю, особый интерес статья вызовет у тех, кто работает в ритейле и постоянно сталкивается с проблемой определения партии заказа в условиях случайного спроса. Конечно, сложно ожидать, что задача управления цепями поставок решится, как только будет применен описываемый алгоритм. Для полного представления об использовании алгоритма было бы уместно перечислить имеющиеся зависимости между оптимизируемыми критериями и остальными, существующими в процессе организации движения потока (но не упомянутыми в статье), поскольку возможно их существенное влияния на окончательные решения относительно заказываемых партий товара.

Также в модели идет неявное допущение, что у производителя цикл исполнения весьма короток, а заказываемые количества всегда в наличии и цена поставки неизменна. Допустим, что это так.

Следующий вопрос, связанный с применением алгоритма, — это технология его использования. Поскольку на практике в ритейле решения о поставках партий товара принимаются ежедневно и для очень большого ассортимента, то появляется необходимость в механизме автоматизации применения алгоритма или предложения, рекомендациях по созданию такого механизма.

Еще один момент, который, думается, следует учесть при использовании алгоритма: насколько совокупность оптимальных, рассчитанных в соответствии с алгоритмом решений (для всей группы закупаемых товаров, например, у одного производителя) будет исполнимой с учетом возможных ограничений бюджета на закупку, требований к оптимальной загрузке транспорта и использования склада?

Также хотелось бы внести небольшое терминологическое уточнение: с одной стороны, авторы говорят, что «в настоящей статье рассматривается модель одной из основных задач логистики — задача оптимального управления товарными потоками от производителя товаров к потребителю», однако, конечным результатом использования алгоритма является оптимизация финансовых показателей функционирования потока (обеспечения заданных вероятностей получения как гарантированной прибыли, так и гарантированной рентабельности). То есть оптимизируется, в конечном итоге, показатель финансовой деятельности, а не сам товарный поток.