НОВЫЙ ФОРМАТ СТРАТЕГИЙ МИНИМИЗАЦИИ ИЗДЕРЖЕК ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАКАЗОВ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ТАРИФОВ ШТРАФОВ ВО ВРЕМЕНИ

ГЕННАДИЙ БРОДЕЦКИЙ,
ГУ-ВШЭ,
профессор,
д.т.н.

Введение. Достижение конкурентного преимущества в логистическом сервисе требует обеспечения достаточной эффективности всех звеньев цепи поставок. Это напрямую касается и тех ее звеньев, которые соотносятся с процессами выполнения заказов. Их эффективность можно повышать без дополнительных вложений: за счет правильного выбора порядка выполнения заказов. В теории сетей обслуживания разработаны модели, позволяющие минимизировать издержки обслуживания [1]. Их можно использовать, если тарифы штрафов не зависят от длительности ожидания начала обслуживания заказа. Некоторые модели минимизации издержек указанного типа (с учетом также и дополнительных особенностей процессов обслуживания заказов) можно найти, например, в [1-4]. Для современных цепей поставок со звеньями за пределами РФ модели издержек обслуживания являются более сложными по структуре их учета и начисления, чем принятые в традиционных исследованиях теории. Интенсивности или тарифы издержек / штрафов в таких моделях являются функциями времени и зависят от длительности ожидания заказом начала обслуживания. Формат таких моделей оптимизации надо соотносить с современными требованиями к анализу денежных потоков, представляющими указанные издержки. Это предполагает учет зависимости тарифов или интенсивностей «штрафов» от времени, причем обусловливает схему непрерывного начисления процента (вместо схемы простых процентов, характеризующей традиционные модели теории сетей обслуживания, которые были рассмотрены в указанных выше работах).

Как находить оптимальные стратегии обслуживания заказов в моделях такого нового типа? Какие особенности модели будут влиять на оптимальное решение? Можно ли сохранить для таких моделей специфику традиционных процедур оптимизации? Чтобы получить ответы на эти и другие вопросы, необходим новый формат исследования, отличный от принятого в теории сетей обслуживания. Его атрибуты представлены в этой статье. При этом рассмотрена модель, в которой априори принимается, что тарифы издержек изменяются во времени в сторону увеличения. Такое изменение соотносится со схемой непрерывных процентов. В статье представлен подход к решению задачи минимизации издержек обслуживания для моделей указанного типа. Он позволяет сохранить структуру традиционного правила оптимизации для определения наилучшей стратегии обслуживания заказов портфеля. При этом менеджеру потребуется только специальным образом ввести и использовать новый формат для «усредняющих» показателей параметров таких моделей.

Учет изменения тарифов штрафов при непрерывном начислении процентов. Для рассматриваемой ниже модели в основу концепции учета штрафов закладывается принцип непрерывного изменения их тарифов во времени (в сторону увеличения). В каждый момент времени t тариф штрафа для заказа с номером i (далее i-заказа), характеризующий интенсивность издержек в этот момент, является функцией времени и обозначается $c_i(t)$. Суммарный штраф для еще не обслуженного i-заказа на промежутке времени $(t_1; t_2)$ определяется интегралом $\int_{t_1}^{t_2} c_i(t)dt$. Пребывание i-заказа в системе с момента формирования портфеля заказов (момент $t=0$) и до момента окончания обслуживания этого заказа (момент, который обозначается T_i) влечет суммарный штраф $\int_0^{T_i} c_i(t)dt$. Моменты окончания обслуживания заказов (T_i) являются случайными величинами (априори принимается, что время выполнения заказа случайное). Поэтому анализируется суммарный ожидаемый штраф по i-заказу как математическое ожидание $M\,(\int_0^{T_i} c_i(t)dt)$.

Рассмотренные ранее модели ([1—4]), связанные с задачами минимизации издержек обслуживания заказов, являют-

АННОТАЦИЯ:
Анализируются процедуры минимизации издержек обслуживания портфелей заказов, которые впервые обсуждаются применительно к моделям цепей поставок, когда необходимо учитывать переменные тарифы штрафов. Представлены атрибуты таких процедур, когда требуется учитывать увеличение указанных тарифов в формате схемы непрерывных процентов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:
Портфели заказов, издержки обслуживания, изменение тарифов штрафов во времени, схема непрерывных процентов, выбор порядка обслуживания.

ANNOTATION:
Procedures of minimizations of costs at service of portfolios of orders for links of chains of deliveries are analyzed. They are discussed with reference to models when it is necessary to consider variable tariffs of penalties. For the first time attributes of such procedures when it is required to consider increase in such tariffs in a format of the scheme of continuous percent are presented.

KEYWORDS:
Portfolios of orders, service costs, change of tariffs of penalties in time, the scheme of continuous percent, choice of an order of service.

ся частными случаями представленной здесь модели. Они соответствуют конкретному вырожденному способу задания тарифов штрафов $c_i(t)$, когда для всех $t \geq 0$ выполнено условие $c_i(t)= c_i$ (это соответствует ситуации, когда тарифы штрафов не зависят от времени пребывания заказов в системе). В такой ситуации для среднего ожидаемого суммарного штрафа по i-заказу имеем равенство: $M(\int_0^{Ti} c_i(t)dt)= c_i \cdot M(T_i)$. Указанное выражение характеризует ситуацию, когда учет наращения штрафов представляется схемой, которую в финансовом анализе называют схемой простых процентов [5—6].

Здесь рассматривается общий подход к минимизации издержек обслуживания заказов, позволяющий учитывать возможность указанного изменения интенсивности штрафов во времени, причем в сторону их увеличения (по схеме непрерывного начисления процентов). Формализуем соответствующий тип модели для случая, когда предусматривается наращение тарифов штрафов во времени. Чем больше времени прошло с момента формирования портфеля, тем более высокими становятся тарифы для штрафов. А именно, в формате такой модели для функций штрафов полагаем $c_i(t)$ = $c_i \cdot e^{\delta t}$, где $\delta \geq 0$, причем параметр $\delta=ln(1+r)$ представляет так называемую (см. [5, 6]) *силу роста* непрерывно начисляемого процента при ставке наращения r (применительно к одному периоду, в качестве которого далее принят год). При этом c_i — значение параметра интенсивности штрафа по i-заказу на момент начала учета соответствующих издержек (момент $t=0$ формирования исходного портфеля заказов). Соответственно принимается, что $c_i(0)= c_i$.

Задача выбора порядка обслуживания заказов. Заданы следующие параметры:

N — число заказов в портфеле;

M[S_i] — математическое ожидание случайной величины S_i — длительности обслуживания i-го заказа, причем величины S_i предполагаются независимыми в совокупности;

c_i — исходное значение параметра интенсивности штрафа для i-го заказа в момент формирования портфеля (т.е. $c_i= c_i(0)$);

$c_i(t) = ci \cdot e\delta t$ — интенсивность издержек в момент времени t;

$\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \dots , i_N)$ — вектор, задающий очередность выполнения заказов портфеля;

T_i — момент времени окончания выполнения i-го заказа, т.е. момент окончания учета штрафов по этому заказу.

Подчеркнем, что T_i есть случайная величина, распределение вероятностей которой зависит: от выбранного порядка обслуживания заказов портфеля; от распределения вероятностей случайной длительности S_i обслуживания i-заказа; от распределений вероятностей тех случайных величин S_j, которые при выбранной стратегии обслуживания заказов будут выполнены ранее этого i-заказа. Поскольку ставка наращения задана в годовых, то показатели времени (показатели T_i и S_j) также предполагаются заданными в указанных единицах измерения. Для рассматриваемой модели суммарные издержки по всем заказам портфеля составят

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^{Ti} c_i(t)dt.$$

Задача состоит в том, чтобы найти оптимальный порядок обслуживания заказов, минимизирующий средние ожидаемые суммарные потери, обусловливаемые обслуживанием заказов всего портфеля:

$$M(\sum_{i=1}^{N} \int_0^{Ti} c_i(t)dt) \longrightarrow min.$$

Уточним эту задачу применительно к рассматриваемой здесь модели утяжеления интенсивности штрафов во времени. Для такой модели (при непрерывном начислении процентов) функции интенсивностей штрафов по i-заказам задаются равенствами $c_i(t)= c_i \cdot e^{\delta t}$. Поэтому издержки по i-заказу портфеля можно определять равенствами

$$\int_0^{Ti} c_i e^{\delta t}\, dt=\frac{1}{\delta}\cdot 1 c_i e^{\delta t} \Big|_0^{Ti} = {}_{\delta} \cdot c_i (e^{\delta t} — 1).$$

Рассматриваемая задача теперь может быть представлена как задача минимизации ожидаемых суммарных штрафов по всему портфелю заказов с учетом указанной схемы их учета:

$$M(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\delta} \cdot c_i \cdot (e^{\delta T_i} - 1)) \to \min \tag{1}$$

Замечание. «Вырожденный» случай переоценки тарифов издержек, когда $\delta \rightarrow 0$, приводит в формате задачи (1) к изученным в [1-4] типам моделей учета штрафов по схеме простых процентов.

Анализ на основе метода перестановки аргументов. Анализ оптимальной стратегии проведем методом перестановки аргументов (см., например, [1]). Для этого сравним суммарные ожидаемые потери двух стратегий обслуживания, для которых порядок реализации заказов определяется двумя векторами: вектором $i = (i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, ik, i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_N)$ — стратегия i; вектором $i' = (i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, ik, i_{k+2}, \dots, i_N)$ — стратегия i'. Порядок обслуживания при векторе i' отличается от порядка обслуживания при векторе i только перестановкой на k-ой и $(k+1)$-ой позициях очереди. Оценим, к каким изменениям (для средних суммарных ожидаемых потерь из-за обслуживания заказов портфеля) приведет такая перестановка. Пусть $C(i)$ обозначает среднее ожидаемое значение суммарного штрафа при стратегии обслуживания, которую задает вектор i. Оценим разность $\Delta = C(i') — C(i)$. Это позволит получить правило построения оптимальной стратегии обслуживания, минимизирующей суммарный ожидаемый штраф по всему портфелю заказов. Для разности $\Delta = C(i')— C(i)$ получаем:

$$\Delta = M[\int_{T_{i_{k-1}}+S_{i_k}}^{T_{i_{k-1}}+S_{i_k}+S_{i_{k+1}}} c_{i_k} \cdot e^{\delta t} dt - \int_{T_{i_{k-1}}+S_{i_{k+1}}}^{T_{i_{k-1}}+S_{i_{k+1}}+S_{i_k}} c_{i_{k+1}} \cdot e^{\delta t} dt].$$

Это выражение (с учетом независимости случайных величин T_i , S_i и T_i) можно записать в виде ,

$$\Delta = \frac{1}{\delta} M(e^{\delta T_{i_{k-1}}}) \cdot [M(c_{i_k} \cdot e^{\delta S_{i_k}}) \cdot M(e^{\delta S_{i_{k+1}}} - 1) -$$

$$M(c_{i_{k+1}} \cdot e^{\delta S_{i_{k+1}}}) \cdot M(e^{\delta S_{i_k}} - 1)].$$

Чтобы оценить знак Δ, надо определить знак выражения в квадратных скобках (в последней записи). Оценим знак модифицированного выражения $\Delta(mod)$ (его знак совпадает со знаком Δ):

$$\Delta(\mathrm{mod}) = M(c_{i_k} \cdot e^{\delta S_{i_k}}) \cdot \frac{1}{\delta} M(e^{\delta S_{i_{k+1}}} - 1) - M(c_{i_{k+1}} \cdot e^{\delta S_{i_{k+1}}}) \cdot \frac{1}{\delta} M(e^{\delta S_{i_k}} - 1).$$

Для дальнейшего анализа необходимо наложить ограничения. Считаем, что для всех заказов портфеля существуют конечные математические ожидания специально сконструированных случайных величин τ следующего типа: $\tau = exp\{\delta Si\}$. Другими словами, требуется, чтобы выполнялись неравенства $M(e^{\delta S_{i_k}}) < \infty$ (в практических ситуациях это условие будет выполняться).

Процедуры оптимизации будут реализованы таким образом, чтобы можно было использовать формат традиционного для сетей обслуживания правила нахождения оптимального порядка выполнения заказов (называемого cµ-правилом [1]). Для этого введем (применительно к модели «утяжеления» тарифов штрафов во времени) два определения для специальных параметров $c_i(mod)$ и $\mu_i(mod)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Определим вспомогательные параметры «усредненных» модифицированных тарифов штрафов $c_i(mod)$ равенствами:

$$c_i(mod) = M(c_i \cdot e^{\delta S_i}),\ i=1,\ 2,\ \dots,\ N. \qquad (2)$$

Величины $c_i(mod)$ можно рассматривать как средние ожидаемые значения для наращенных (на интервале обслуживания заказа случайной длительности S_i) величин исходных тарифов штрафов ci, которые переоцениваются по схеме непрерывного начисления процента. Указанная переоценка в (2) и формализация представленного «среднего» значения реализуется на основе наращения тарифа ci на интервале времени, равном промежутку случайной длительности S_i обслуживания i-заказа. Если $\delta \to 0$, то $e^{\delta S_i} \to 1$ с вероятностью единица (следовательно, и $c_i(mod) \to c_i$). В указанном предельном случае введенные в (2) специальные параметры переоцененных тарифов штрафов совпадают с исходными параметрами c_i традиционной модели.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Определим специальные вспомогательные параметры модифицированных интенсивностей обслуживания заказов портфеля $\mu_i(mod)$ в формате анализируемой модели равенствами:

$$\mu_i(mod) = \frac{1}{M(e^{\delta S_i} - 1)/\delta},\ i=1,\ 2,\ \dots,\ N. \qquad (3)$$

Величины в знаменателе (3) можно интерпретировать как средние ожидаемые «переоцененные» длительности обслуживания заказов (процедуры переоценки аналогичны процедурам (2), но относятся к длительностям выполнения заказов). Формулы (3) показывают как при «усреднении» следует учитывать такие процедуры переоценки в соответствии с принятой схемой непрерывных процентов. Параметры $\mu_i(mod)$, определяемые равенствами (3), можно интерпретировать как модифицированные «интенсивности» обслуживания i-заказов портфеля с учетом указанного «усреднения». При $\delta \to 0$ выполняется $\mu_i(mod) \to \mu_i$. В предельном случае переоцененные в (3) модифицированные параметры совпадают с интенсивностями μ_i выполнения заказов применительно к формату традиционной модели.

Правило оптимизации для модели с переоценкой штрафов во времени. Возвращаясь к оценке знака для разности Δ(mod), выразим (с учетом (2) и (3)) ее через новые модифицированные параметры:

$$\Delta(\mathrm{mod}) = \frac{c_{ik}(\mathrm{mod}) \cdot \mu_{ik}(\mathrm{mod}) - c_{ik+1}(\mathrm{mod}) \cdot \mu_{ik+1}(\mathrm{mod})}{\mu_{ik}(\mathrm{mod})\, \mu_{ik+1}(\mathrm{mod})}.$$

Знаменатель последнего выражения положителен. Поэтому в случае, когда выполняется неравенство

$$c_{i_k}(\mathrm{mod}) \cdot \mu_{i_k}(\mathrm{mod}) < c_{i_{k+1}}(\mathrm{mod}) \cdot \mu_{i_{k+1}}(\mathrm{mod}), \qquad (4)$$

имеет место также и неравенство $\Delta(mod) < 0$.

Полученное неравенство позволяет утверждать, что порядок обслуживания заказов портфеля не будет оптимальным до тех пор, пока он не будет соответствовать следующему правилу. Заказы должны быть упорядочены по признаку не возрастания специального модифицированного индекса, который обозначим $I(i)$. Указанный индекс определяется как произведение $I(i)=c_i(mod)\cdot\mu_i(mod)$. Итак, при переоценке тарифов штрафов во времени на основе их наращения по схеме непрерывного начисления процента, известное в традиционном формате таких задач (когда учет издержек предполагает схему простых процентов) оптимальное cµ-правило следует заменить на доказанное здесь специальное c(mod)µ(mod)-правило. Модифицированные параметры средних переоцениваемых наращенных штрафов в формате такого правила определяются равенствами (2), а модифицированные параметры интенсивностей обслуживания (после переоценки наращенных длительностей выполнения заказов) определяются равенствами (3). Нетрудно проверить, что при $\delta \to 0$ (соответственно и $r \to 0$) имеем $I(i)=c_i(mod)\cdot\mu_i(mod) \to c_i\cdot\mu_i$. Это иллюстрирует, что полученные здесь результаты обобщают традиционные алгоритмы оптимизации, например, представленные в [1—4]. Окончательно, результаты анализа для рассмотренной модели можно представить следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ (оптимальное $c(mod)\mu(mod)$ — правило). Если учет издержек или штрафов с наращиваемыми тарифами реализуется на основе схемы непрерывных процентов, то оптимальная стратегия должна обслуживать заказы портфеля в порядке, задаваемом специальным $c(mod)\mu(mod)$ — правилом, в соответствии с которым не должны возрастать индексы $I(i)=c_i(mod)\cdot\mu_i(mod)$ для последовательно выполняемых заказов.

ПРИМЕР. Компания «АС» имеет пакет из трех заказов (совмещение их выполнения неприемлемо из-за возможной потери качества). По этим заказам наступили сроки штрафных санкций, но работы так и не начались (из-за задержки в поставке спецоборудования). Интенсивности c_i соответствующих штрафов для указанных трех заказов на сегодня составляют 1% от контрактной цены соответствующего заказа. Контракты предусматривают «утяжеление» нагрузки штрафов по схеме непрерывно начисляемого процента при силе роста δ = 0,2 (т.е. 20 % годовых). Длительности реализации заказов — случайные величины, распределенные по показательному закону с математическими ожиданиями $M(S_i)$. Контрактные цены по заказам и длительности обслуживания заказов приведены в табл. 1. Требуется определить порядок выполнения заказов, который обеспечит минимальный ожидаемый размер суммарных штрафных санкций.

Таблица 1

Атрибуты заказов портфеля

Заказ №	$M(S_i)$ (сутки)	P_i (тыс. руб.)	c_i (тыс. руб.)
1	10	180	1,8
2	7,5	100	1,0
3	15	240	2,4

Решение. Для представленной модели оптимальный порядок обслуживания заказов определяется, как было доказано выше, разработанным $c(mod)\mu(mod)$ — правилом. Сначала требуется проверить выполнение ограничений $M(e^{\delta S_i}) < \infty$ для i=1, 2, 3. Учитывая, что длительности обслуживания заказов имеют экспоненциальный закон распределения вероятностей, покажем, что $M(e^{\delta S_i})$ существуют и конечны, если выполняются неравенства $\lambda_i > \delta$ (далее λ_i — интенсивности указанных распределений вероятности):

$$M(e^{\delta S_i}) = \cdot \int_0^\infty e^{(\delta-\lambda_i)t}\, dt = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \delta} \int_0^\infty e^{-z}\, dt = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \delta} = \frac{1}{1 - \delta \cdot M(S_i)}. \quad (5)$$

Напомним, что параметр λ_i для экспоненциального закона распределения вероятностей связан с соответствующим математическим ожиданием $M(S_i)$ равенством $\lambda_i = 1/ M(S_i)$. Следовательно, неравенства $\lambda_i > \delta$ можно переписать в виде $M(S_i) < 1/\delta$. Кроме того, согласно условию имеет место равенство $\delta=0,2$. Поэтому последние неравенства имеют совсем простой вид $M(S_i) < 5$. Легко проверить, что они выполняются. При проверке указанных неравенств, напомним, надо учесть, что длительности обслуживания заказов в формате модифицированного $c(mod)\mu(mod)$ — правила должны быть выражены именно в годах (соответственно надо учесть, что $M(S_1)$=10/365; $M(S_2)$=7,5/365; $M(S_3)$=15/365).

Далее для модифицированных значений $c_i(mod)$ по формулам (2) имеем:

$c_1(mod)$ = 1,8099; $c_2(mod)$ = 1,0041; $c_3(mod)$ = 2,3804.

Аналогично находим модифицированные значения параметров интенсивностей обслуживания заказов $\mu_i(mod)$. Из формул (3) имеем:

$\mu_1(mod) = \delta/[M(e^{\delta S_i})$ –1] = 0,2/[1,0055 –1] = 36,36;

$\mu_2(mod) = \delta/[M(e^{\delta S_i})$ –1] = 0,2/[1,0041 –1] = 48,78;

$\mu_3(mod) = \delta/[M(e^{\delta S_i})$ –1] = 0,2/[1,0082 –1] = 24,39.

Дальнейшие процедуры оптимизации являются традиционными для таких задач минимизации издержек обслуживания заказов: 1) определяем произведение найденных показателей, т.е. для i-заказов находим значения их специальных индексов $I(i) = c_i(mod)\cdot\mu_i(mod)$; 2) упорядочиваем заказы портфеля по убыванию указанных индексов (см. табл. 2).

Таблица 2

Оптимальный порядок выполнения «штрафных» заказов

Заказ №	$\mu_i(mod)$	$c_i(mod)$	Индекс $c_i(mod)\cdot\mu_i(mod)$	Очередность выполнения
1	36,36	1,8099	65,81	1
2	48,78	1,0041	48,98	3
3	24,39	2,3804	58,15	2

Заказы в условиях этого примера надо выполнять в следующем порядке (см. последний столбец табл. 2). Сначала выполняется заказ № 1, затем заказ № 3, наконец, заказ № 2. Сопоставим полученный результат с «близорукой» стратегией: она предполагает обслуживание заказов портфеля в порядке убывания тарифов штрафов по этим заказам. Кстати, менеджеры часто ошибочно принимают такую стратегию за оптимальную, если при выборе порядка выполнения заказов ориентируются на простое убывание тарифов штрафов. «Близорукая» стратегия в рассматриваемой ситуации будет рекомендовать обслуживать эти заказы в порядке: (3; 1; 2). Найденная оптимальная стратегия сократит издержки обслуживания на 4,75% (по сравнению с «близорукой» стратегией, которую часто считают наилучшей). В общем случае, выигрыш по сравнению со случайным порядком выполнения заказов будет более существенным. Если указанное снижение издержек обслуживания для одного рассмотренного портфеля заказов покажется небольшим, то надо учесть, что регулярное использование найденного правила оптимизации порядка выполнения заказов в цепях поставок позволит для заказов рассматриваемого типа получить сокращение годовых издержек их обслуживания на величину порядка 5%.

Заключение. В статье впервые проведен анализ процедур минимизации издержек обслуживания для портфелей заказов применительно к моделям цепей поставок, когда необходимо учитывать переменные тарифы штрафов. Представлены атрибуты таких процедур, когда формат модели предполагает увеличение указанных тарифов по схеме непрерывных процентов. В заключение также подчеркнем следующее. Введенный здесь новый формат для специальных индексов $I(i)$, по которым находится наилучший порядок выполнения портфеля заказов, уже априори обусловливает их зависимость от конкретных законов распределения вероятностей для длительностей выполнения заказов (указанная зависимость отсутствовала в традиционных моделях [1]). Анализ такой зависимости может обусловить методологическую основу для более простых процедур выработки управленческих решений. Это потребует дополнительного исследования.

Библиографический список:

1. *Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. М.: Мир, 1993 г. — 336 с.*
2. *Бродецкий Г.Л. Минимизация издержек обслуживания портфеля заказов при случайных «тарифах» штрафных функций / Журн. «РИСК», № 3, 2009.*
3. *Бродецкий Г.Л. Оптимальный порядок обслуживания заказов в цепях поставок с учетом рисков потерь доходов и инфляции / Журн. «Логистика и управление цепями поставок», № 5, 2009.*
4. *Бродецкий Г.Л. Имеющиеся резервы снижения издержек обслуживания заказов в цепях поставок / Журн. «Логистика сегодня», № 5, 2009.*
5. *Четыркин Е.М. Финансовая математика. Учебник. М.: Дело, 2007. — 400 с.*
6. *Ковалев В.В. Финансовый анализ. М.: Финансы и статистика, 1997. — 512 с.*