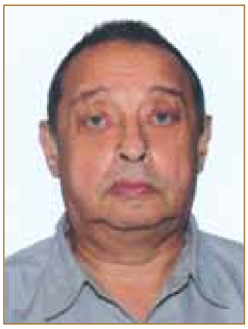
МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ПОСТАВКИ ТОВАРОВ С ОДНОШАГОВОЙ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ ЦЕННОСТЬЮ



ГРИГОРИЙ СОКОЛОВ
РЭУ им. Г. В. Плеханова,
профессор,
д.т.н.

ЕКАТЕРИНА ВОЛОБУЕВА
РЭУ им. Г.В. Плеханова,
аспирант

Рассматривается экономическая система, включающая трех участников (производителя, продавца и покупателя товаров) и выполняющая на интервале времени длительностью N шагов операцию по снабжению населения товарами.

Случайный процесс, протекающий в системе, называется Марковским, если для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

По заявке продавца производитель товаров к началу n-го шага (n — текущий номер шага, число шагов до завершения операции) поставляет продавцу определенное количество товара $L(n)(L' \le L(n) \le L'')$ по закупочной цене Δ. Под шагом понимается интервал времени между соседними моментами поставок товаров продавцу. Рассматриваются два возможных вида товара. Для первого вида предполагается, что его потребительская ценность сохраняется на протяжении ровно одного шага, для второго — на протяжении всей операции. Первый вид товара рассматривается в рамках первой марковской модели (ММ-1), второй вид товара предполагается рассмотреть в следующей статье в рамках второй марковской модели (ММ-2). Для каждого шага возможны два случая. В первом случае имеет место дефицит товара (спрос превышает запас товара (предложение) продавца), и продавец терпит убытки от неудовлетворенного спроса. Во втором случае возникает избыток товара (предложение продавца превышает спрос покупателей на товар). В случае товара первого вида избыток в конце текущего шага ликвидируется по сниженной цене, в случае товара второго вида избыток остается в продаже на следующем шаге. Продавец поставляет товар покупателю по цене реализации $(\Delta + a(n))$, где $a(n)(a' \le a(n) \le a'')$ наценка, устанавливаемая продавцом. Каждый шаг процесса поставки товара характеризуется затратами продавца $r(a(n), L(n), x(n))$, его прибылью $g(a(n), L(n), x(n))$ и рентабельностью $R(_{an}, L_n, x_n)$. Согласно [1—3] одношаговая прибыль равна (индекс n опускается):

$$g(a,L.x)=\begin{cases}(a+b)x-bL, x\le L\\ (a+c)L-cx, x>L\end{cases}, \qquad (1)$$

где $b = \Delta - b_0$ — потери в цене при продаже избытка товара, c — цена упущенной выгоды при затратах, x — спрос.

$$r(L,x)=\begin{cases}\Delta\cdot L, x\le L\\ \Delta\cdot L+(x-L)c, x>L\end{cases}. \qquad (2)$$

Рентабельность одношаговой операции определяется делением соотношения (1) на соотношение (2):

$$T(a,L,x)=\begin{cases}\dfrac{(a+b)x-bL}{\Delta L}, x\le L\\ \dfrac{(a+c)L-cx}{\Delta L+(x-L)c}, x>L\end{cases}. \qquad (3)$$

Предполагается, что в начале n-го шага запас товара равен $L(n)$, наценка на товар — $a(n)$ и спрос — $x(n)$. Согласно принятой в настоящей статье модели спрос на товар $x(n)$ зависит от спроса на предыдущем шаге $x(n+1)$ и наценки $a(n)$, и эта зависимость задается условной вероятностью $p(x(n+1) \longrightarrow x(n)|a(n))$, зависящей от наценки.

Продавец осуществляет поставку товара потребителю в объеме $M(n)=min\{L(n),x(n)\}$. Она оплачивается продавцом (по цене Δ) на этом же шаге и продается потребителю по цене $(\Delta+a(n))$. Если $M(n)=x(n)$, т.е. $L(n) \ge x(n)$, то на n-м шаге остается нереализованным избыток товара, равный $(L(n) - x(n))$. В рамках модели ММ-2 этот избыток реализуется и оплачивается продавцом на следующем шаге (формально можно считать, что он возвращается производителю). В рамках модели ММ-1 этот избыток продается по сниженной цене. Если $M(n)=L(n)$, т.е. $L(n) \le x(n)$, то на n-м шаге запас $L(n)$ реализуется полностью, более того, спрос потребителя в объеме $(x(n) - L(n))$ оказывается неудовлетворенным. Таким образом, в рамках обеих моделей в конце любого (в том числе n-го) шага запас товара у продавца можно считать формально равным нулю.

Из изложенного следует, что процесс поставки товара моделируется N-шаговой цепью Маркова. На каждом n-м шаге ($n=1,2\dots N$) состояние цепи характеризуется величиной спроса, равного $x(n)$. Переходы из состояния в состояние определяются условными вероятностями $p(x(n) \longrightarrow x(n-1)|a(n-1))$. Продавец управляет процессом путем выбора двух величин: предложения $L(n)$ и наценки $a(n)$, в неуправляемом режиме эти величины предполагаются фиксированными, в частности $L(n)=L$, $a(n)=a$ для всех n. Требуется на каждом n-м шаге выбрать управление (параметры) $a^*(n-1), L^*(n-1)$ так, чтобы математическое ожидание прибыли, получаемой продавцом в рамках N-шаговой операции, было максимальным при ограничениях на рентабельность.

Обозначим условное математическое ожидание прибыли за n шагов при условии, что на n-м шаге спрос равен $x(n)$, как $G_n(x(n))$. Эта прибыль может быть получена следующим обра-

АННОТАЦИЯ
Статья посвящена изложению алгоритма оптимизации параметров (объема заказа и цены реализации) процесса поставки и реализации товаров потребителям при случайной зависимости спросов, моделируемой процессом Маркова.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:
оптимизация, объем поставок, цена реализации, прибыль, рентабельность, случайная зависимость, спрос, цепь Маркова.

ANNOTATION
The article is devoted to algorithm of optimizing the parameter (volume of order and selling price) of the delivery and sell process of goods to consumers by random demand, modeled by a Markov process.

KEYWORDS
Optimization, the volume of supplies, the price of release, the profit, the profit margin, stochastic relation, demand, Markov chain.

зом: на *n*-м шаге система с вероятностью $p(x(n) \longrightarrow x(n-1)|a(n-1))$ переходит в состояние $x(n-1)$ и получает одношаговую прибыль $g(a(n-1), L(n-1), x(n-1))$. Из этого состояния система осуществляет оставшиеся $(n-1)$ шагов и получает прибыль $G_{n-1}(x(n-1))$. Тогда по формуле полного математического ожидания получаем математическое ожидание прибыли в виде рекуррентного соотношения:

$G_n(a(n-1), L(n-1), x(n))=\sum p(x(n)\longrightarrow x(n-1)|a(n-1))[g(a(n-1), L(n-1), x(n-1)) + \beta G_{n-1}(x(n-1)]$, (4), где сумма берется по всем возможным значениям $x(n-1) \in X$, удовлетворяющим ограничениям по рентабельности.

В дальнейшем предполагается, что:

- множества возможных значений спроса $x(n)$ и запаса товара $L(n)$ совпадают, не зависят от *n* и обозначаются $\in$;
- элементы этого множества могут принимать значения от 0 до *Q*;
- товар хранится на складе, объем которого $D \le Q$.

Потребуем, чтобы на каждом шаге рентабельность операции была не менее

$T_0(a) = h \dfrac{a}{\Delta}$, где коэффициент $h \in (0,1)$ задан.

Это условие выполняется всякий раз, когда $x \in [x'\ x'']$, где границы x' и x'' есть решения уравнений, представленных ниже:

$$\frac{(a+b)x-bL}{\Delta L}= \quad T_0(a)\to x' = (T_0(a)\Delta+b)L/(a+b);$$

$$\frac{(a+c)L-cx}{\Delta L+(x-L)c}= T_0(a)\to x'' = L[a+c-T_0(a)(\Delta-c)]/c[1+T_0(a)].$$

С учетом ограничений по рентабельности условная вероятность переходов принимает вид:

$p(x(n+1) \longrightarrow x(n)|a(n),L(n)) = p(x(n+1) \longrightarrow x(n)|a(n))$ (5)

при условии $x(n) \in [x'\ x'']$.

Из (4) и (5) следует, что оптимальное управление можно найти методом динамического программирования [4]:

$$\begin{aligned}G^*_n(x(n)) &= \max_{a(n-1),L(n-1)} G_n(a(n-1),L(n-1),x(n)) =\\ &= \max_{a(n-1),L(n-1)} \sum \partial(x(n)\to x(n-1)\,|\,a(n-1),L(n-1))[g(a(n-1),L(n-1),x(n-1))+\\ &+\beta G_{n-1}(x(n-1)] =\\ &= \sum \partial(x(n)\to x(n-1)\,|\,a^*(n-1),L^*(n-1))[g(a^*(n-1),L^*(n-1),x(n-1))+\\ &+\beta G^*_{n-1}(x(n-1)],\end{aligned} \tag{6}$$

где

- *max* берется по всем возможным значениям $a(n-1)$, $L(n-1)$;
- суммирование выполняется по всем возможным значениям $x(n-1)$ при ограничениях по рентабельности: $x' \le x(n-1) \le x''$;
- β коэффициент переоценки, $0 < \beta \le 1$;
- *n* последовательно принимает значения *1,2… N*.

Рассмотрим вариант, когда $n = 1$, т.е. остался один шаг до завершения операции. Учитывая, что $Q^*_{n-1}(x(n-1))\ l_{n-1} = 0$, для всех $x(1) \in X$ получим, полагая в формуле *(6)* $n=1$, максимальное значение средней одношаговой прибыли:

$$G_1^*(x(1)) = \\ = \max_{a(0),L(0)} \sum_{x(0)\in X} p(x(1)\to x(0)\,|\,a(0),L(0))\,g(a(0),L(0),x(0)),$$

где одношаговая прибыль при переходе к нулевому шагу вычисляется по формуле

$$g(a(0),L(0),x(0)) = \begin{cases}(a(0)+c)L(0)-x(0)c, L(0)<x(0)\\ a(0)x(0), L(0)\ge x(0)\end{cases}.$$

Тогда таблица результатов, т.е. оптимальных значений наценки $a^*(n)$, предложения $L^*(n)$ и средней прибыли $G^*(n)$, соответствующих каждому из возможных значений спроса $x(n)$ при $n=1$ обозначается *R(1)*.

Пусть $n=2$, т.е. осталось два шага до завершения операции. Спрос на этом шаге равен $x(2) \in X$, при переходе к первому шагу с вероятностью $p(x(2) \longrightarrow x(1)|a(1), L(1))$ одношаговая прибыль вычисляется по формуле

$$g(a(1),L(1),x(1)) = \begin{cases}(a(1)+c)L(1)-x(1)c, L(1)<x(1)\\ a(1)x(1), L(1)\ge x(1)\end{cases},$$

а максимальное значение средней двухшаговой прибыли — по формуле (6):

при $n = 2$

$$G^*_2(x(2)) = \\ = \max_{a(1),L(1)} \sum_{x(1)\in X} \partial(x(2)\to x(1)\,|\,a(1),L(1))[g(a(1),L(1),x(1))+\beta G^*_1(x(1)],x(2)\in X.$$

Таблица результатов, т.е. оптимальных значений наценки $a^*(n)$, предложения $L^*(n)$ и средней прибыли $G^*(n)$, соответствующих каждому из возможных значений спроса $x(n)$ при $n = 2$, обозначается *R(2)*.

Аналогично строится *R(n)* для *n=3,4… N*.

Рассмотрим числовой пример. В данном примере приняты следующие исходные данные:

$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$, $c = 4$, $b = 16$
$\Delta = 20$, $h = 0{,}64$, $\beta = 0{,}8$, $D = Q = 4$

Таблица 1

Вероятности перехода из состояния в состояние *x(n)*, в состояние *x(n – 1)*

$p(x(n) \longrightarrow x(n-1)|a(n-1))$

a(n – 1)	x(n)\x(n – 1)	0	1	2	3	4
10	0	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1
10	1	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1
10	2	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
10	3	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2
10	4	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3
20	0	0,3	0,3	0,2	0,2	
20	1	0,2	0,3	0,3	0,2	
20	2	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
20	3		0,2	0,3	0,3	0,2
20	4		0,2	0,2	0,3	0,3
30	0	0,4	0,3	0,3		
30	1	0,3	0,4	0,3		
30	2	0,1	0,3	0,4	0,2	
30	3		0,1	0,4	0,4	0,1
30	4			0,2	0,3	0,5
40	0	0,5	0,3	0,2		
40	1	0,2	0,5	0,3		
40	2		0,3	0,5	0,2	
40	3			0,3	0,5	0,2
40	4			0,1	0,4	0,5
50	0	0,6	0,4			
50	1	0,5	0,5			
50	2		0,4	0,6		
50	3			0,5	0,5	
50	4				0,4	0,6

Результаты решения имеют следующий вид (см. рисунок 1).

R(1) =

n	x	a*	L*	G*
1	0	–	–	< 0
1	1	50	1	50
1	2	50	2	100
1	3	50	3	150
1	4	50	4	200

R(2) =

n	x	a*	L*	G*
2	0	20	2	55
2	1	40	1	75
2	2	40	2	199
2	3	50	3	252
2	4	50	4	346

R(3) =

n	x	a*	L*	G*
3	0	20	2	87
3	1	40	1	108
3	2	30	2	224
3	3	50	3	305
3	4	50	4	397

Рисунок 1

Результаты решения числового примера

Таким образом, в настоящей статье предложено значительное обобщение задачи оптимизации управления цепями поставок, рассмотренной в статьях [1—4], на случай стохастически зависимых спросов. Эта зависимость моделируется в рамках марковских процессов, построение оптимального управления осуществляется методами динамического программирования.

Библиографический список:

1. *Волобуева Е. Ю. Детерминированная модель оптимизации объема поставок товара и цены его реализации по критерию прибыли // Современные аспекты экономики. — 2009. — № 24.*
2. *Волобуева Е. Ю. Возможности оптимизации объема заказа и цены реализации товара в цепи поставок // Логистика. — 2010. — № 3.*
3. *Волобуева Е. Ю. Двукритериальная детерминированная модель оптимизации объема заказа товара и цены его реализации в цепи поставок: Доклад на VI международной научно-практической конференции «Логистика–Евразийский мост». 2—3 марта 2011 г. Красноярск.*
4. *Бродецкий Г. Л., Волобуева Е. Ю. Управление цепями поставок при многих критериях в условиях случайного спроса // Логистика. — 2012. — № 3.*
5. *Соколов Г. А., Чистякова Н. А. Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова в экономике. — М.: Физматлит, 2005.*

КОММЕНТАРИЙ

К СТАТЬЕ «МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ПОСТАВКИ ТОВАРОВ С ОДНОШАГОВОЙ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ ЦЕННОСТЬЮ»

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОДЕЛИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЛОГИСТИКЕ

КАТЕРИНА ТОКАРЕВА
НИУ-ВШЭ
доцент, к.э.н.

Марковские процессы представляют собой частный/специальный вид случайного процесса. Особое место Марковские процессы (среди случайных процессов общего вида) занимают благодаря их применимости для описания поведения сложных систем. Это включает сравнительную простоту, наглядность и хорошую проработанность математического аппарата. Модели на основе Марковских цепей находят применение в оценке оптимизационных решений для многих сфер (услуг, торговли), а также играют огромную роль в моделировании систем массового обслуживания (СМО), которые, в свою очередь, активно используются для моделирования логистических систем.

Модели на основе Марковских цепей можно широко применять в логистике, например, при оптимизации моделей транспортного обслуживания. Прокомментируем ситуацию/модель такого типа, позволяющую проводить анализ в условиях риска. Пусть производственное предприятие осуществляет поставку готовой продукции собственным автотранспортом в адрес клиента. Рассматривая последовательные моменты завершения поставок, можно выделить различные варианты их окончания, которые обусловят особенности реализации следующих поставок.

При анализе можно выделить следующие сценарии:

- θ_1 — груз доставлен без задержек и повреждений (сохранил потребительские свойства);
- θ_2 — во время транспортировки груза произошла задержка в пути по причинам, не зависящим от водителя (например, плохие погодные условия), в результате чего приемка товара возможна только на следующий день;
- θ_3 — во время транспортировки груза произошел отказ/поломка холодильной установки, а, следовательно, продукция потеряла потребительские свойства;
- θ_4 — во время транспортировки груза произошла аварийная ситуация/поломка транспортного средства, груз не может быть доставлен в срок, необходимо уведомить клиента о переносе заказа, также необходимо произвести ремонт транспортного средства.

Соответственно при анализе процесса доставки груза в адрес клиента можно выделить следующие состояния:

- A_1 — груз доставлен клиенту надлежащего качества в срок;
- A_2 — груз доставлен клиенту надлежащего качества с опозданием;
- A_3 — груз доставлен в срок, но ненадлежащего качества по причине поломки холодильной установки;
- A_4 — груз не доставлен клиенту в срок по причине поломки транспортного средства;
- A_5 — груз доставлен клиенту с опозданием и ненадлежащего качества (по причине поломки холодильной установки);
- A_6 — груз не доставлен клиенту в срок по причине задержки транспортного средства в пути и возникновения аварийной ситуации;
- A_7 — груз не доставлен клиенту надлежащего качества по причине поломки холодильной установки и возникновения аварийной ситуации;
- A_8 — груз не доставлен клиенту надлежащего качества в срок по причине наступления всех, отмеченных выше, неблагоприятных событий.

При анализе процесса доставки можно сделать допущение о том, что на следующее состояние системы (при очередной поставке) будет в основном влиять только ее предыдущее состояние. Например, при возникновении какой-либо поломки руководство транспортного цеха компании произведет диагностику состояния автомобиля с целью недопущения аналогичной ситуации при следующей поставке, а при возникновении задержки в процессе доставки — при следующей поставке будут предприняты меры, направленные на своевременное прибытие транспортного средства в пункт назначения.

Модель Марковского процесса для транспортировки груза может быть проиллюстрирована графом переходов. В данном графе состояния системы — вершины — связаны между собой связями, которые представлены переходами из *i*-го в *j*-е состояние. Каждый переход характеризуется параметром «вероятность перехода» — *Pij*. Также модель данного процесса может быть задана при помощи матрицы вероятностей переходов, где элементы матрицы *Pij*, находящиеся на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, представляют собой вероятности перехода системы из *i*-го в *j*-е состояние.

Таким образом, модель анализируемого процесса доставки продукции от производственного предприятия в адрес клиента представляет собой дискретную Марковскую цепь, в которой есть восемь состояний.

Матрица вероятностей переходов

	A1	A2	…	Aj	…	A7	A8
A1	P11	P12	…	P1j	…	P17	P18
A2	P21	P22	…	P2j	…	P27	P28
…	…	…	…	…	…	…	…
Ai	Pi1	Pi2	…	Pij	…	Pi7	Pi8
…	…	…	…	…	…	…	…
A7	P71	P72	…	P7j	…	P77	P78
A8	P81	P82	…	P8j	…	P87	P88

Когда заданы вероятности переходов от одного состояния к другому, часто определяется вероятность того, в каком состоянии будет находиться система через определенное количество переходов.

В данном примере для лиц, ответственных за процесс доставки, актуальными будут следующие вопросы: с какой вероятностью произойдет поломка транспортного средства через *n* дней (если доставка производится ежедневно, то период равен одному дню), с какой вероятностью произойдет поломка холодильной установки через *n* дней и т.д.

Если каждое из представленных состояний системы при анализе процесса доставки продукции охарактеризовать доходом, который можно представить как сумму приходящих и/или уходящих потоков платежей, то данный процесс можно представить в виде потока денежных средств, которые являются случайными величинами.

Так, состояние системы A1 может быть охарактеризовано доходом, который представляет собой сумму приходящих платежей, поступающих от реализации заказа продукции, и затрат на транспортировку заказа (уходящих платежей). В состоянии системы A2 (дополнительно к потокам платежей, характеризующим состояние A1) появляются уходящие платежи, связанные с простоем транспортного средства (заработная плата водителя и стоимость горюче-смазочных материалов, израсходованных за время простоя). Аналогично можно охарактеризовать и остальные состояния данной системы. Следовательно, для анализируемого процесса доставки можно определить величину ожидаемого дохода/потерь по итогам определенного количества переходов системы. Для анализа таких показателей на больших интервалах времени потребуется определять так называемые предельные вероятности состояний цепи Маркова. Их взвешенная сумма с соответствующими (по состояниям) показателями доходов и издержек позволит прогнозировать экономический результат на таких периодах времени.

Однако при помощи представления доставки продукции как Марковского процесса можно оценить решения, принимаемые лицами, принимающими решения, целью которых является оказание определенного воздействия на величины вероятностей переходов и величины доходов и/или. Например, для снижения вероятности аварии или поломки транспортного средства производственное предприятие может чаще проводить необходимую диагностику и техническое обслуживание. Данная мера, которая может называться стратегией, обусловит дополнительные расходы. Аналогичной может быть стратегия для снижения вероятности поломки холодильной установки.

Оптимальным в теории Марковских процессов будет являться решение, которое позволит максимизировать полный ожидаемый доход для всех состояний в течение определенного периода (которое может быть представлено количеством переходов). Применение Марковских процессов для прогнозирования различных неблагоприятных ситуации в процессе доставки продукции позволит производственному предприятию своевременно разработать и внедрить меры по их нивелированию или устранению.